Subject: المحاضرة الأولى

__مقدمة:__

إن أول من عرف نصف الزمرة هو العالم الفرنسي المشهور J. A. de Séguier كان ذلك 1904 ولكن نظرية نصف الزمرة بدأت عام 1928 بفضل العالم الروسي A. K. Suschkewitsch حيث أثبت أن كل نصف زمرة منتهية تحوي نواة، وفي عام 1970 صدرت أول مجلة علمية متخصصة بأبحاث نصف الزمرة وهي Semigroup Forum.

__تعاريف أولية:__

- نصف الزمرة: لتكن * قانون تشكيل داخلي على المجموعة غير الخالية S إذا كان * تجميعية على S فإننا نقول بأن $(S,*)$ هي نصف زمرة أي إذا حققت * الخاصة التالية:

$$x*(y*z) = (x*y)*z \; ; \; \forall x,y,z \in S$$

- سوف نكتب اختصاراً xy بدلاً من $x*y$ كما نسمي العملية بالضرب أحياناً.
- إن شرط الخاصة التجميعية في نصف الزمرة S يسمح لنا أن نكتب التركيب $x_1 x_2 x_3 \cdots x_n \; ; \; x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n \in S$ دون أقواس
- سوف نرمز بـ $|S|$ لرتبة S أو قدرة المجموعة S
- سوف نرمز لنصف الزمرة الجزئية بالرمز $(S,.)$ أو اختصاراً S فقط
- إذا كانت نصف الزمرة S تملك الخاصة الإبدالية $xy = yx \; ; \forall x,y \in S$ نقول عنها نصف زمرة تبديلية.
- أما إذا ملكت نصف الزمرة S عنصراً e يحقق الشرط التالي $xe = ex = x \; ; \forall x \in S$ قلنا أن S ذات عنصر حيادي e وندعوها عندئذٍ نصف الزمرة واحدية مونوئيد.
وغالباً نرمز للعنصر الحيادي بـ 1 أما إذا حقق العنصر e الشرط التالي فقط $xe = x \; ; \forall x \in S$ فإننا نقول عن e أنه حيادي يميني وبصورة مشابهة نعرف الحيادي اليساري.
ومن الواضح أنه في أي نصف زمرة S إذا كان e عنصراً حيادياً و e' عنصراً حيادياً آخر فإن $e = e'$ وذلك لأن: $e = ee' = e'$.

(مهمة) - إذا لم تملك نصف الزمرة S عنصر حيادي فيمكن تزويدها به وذلك بإضافة عنصر جديد هو 1 إلى S يخضع للشرط التالي:

$$\forall s \in S : s1 = 1s = s \quad \& \quad 1.1 = 1$$

- سنرمز بـ S^1 للمجموعة:

$$S^1 = \begin{cases} S & ; \text{إذا كانت } S \text{ تحوي } 1 \\ S \cup \{1\} & ; \text{إذا كانت } S \text{ لا تحوي } 1 \end{cases}$$

Subject: /   /

- إذا كانت S تحوي أكثر من عنصر وكانت تحوي العنصر k الذي يحقق الشرط :

$$\forall x \in S \; , \; xk = kx = k$$

فإننا ندعو k عنصراً ماصاً أو عنصراً صفرياً ونرمز له غالباً بالرمز 0 . كما نقول عن S أنها نصف زمرة ذات صفر . ونعرف الصفر اليميني والصفر اليساري بالشكل المشابه للحيادي اليميني والحيادي اليساري .

- إذا ملكت S عنصراً ماصاً فهو وحيد لأنه لو كان خلاف ذلك أي لو كان يوجد عنصراً ماصاً آخر مثل k' فإن $k = kk' = k'$.

- إن أهمية الشرط (S تحوي أكثر من عنصر) تأتي من أن نصف الزمرة التافهة $\{a\}$ حيث $a^2 = a$ يكون فيها a حيادي وصفر في نفس الوقت .

- إذا كانت نصف الزمرة S لا تحوي عنصراً ماصاً فمن السهل تزويدها به وذلك بإضافة صفر ~~...~~ إلى المجموعة S يحقق الشرط :

$$\forall s \in S \; ; \; s0 = 0s = 0 \quad ; \quad 0.0 = 0$$

فنحصل على نصف زمرة $S \cup \{0\}$ ذات عنصر ماص 0 وذات صفر ونرمز لها بالرمز S^0 ويكون :

$$S^0 = \begin{cases} S & ; \text{S تحوي صفر} \\ S \cup \{0\} & ; \text{S لا تحوي صفر} \end{cases}$$

ملاحظة : إن إضافة أي من العنصرين الحيادي أو الماص إلى نصف الزمرة S قد يؤدي إلى فقدان بعض صفاتها الأصلية .

مثال : لتكن G زمرة غير تافهة (هي بالطبع أيضاً نصف زمرة) ولنضف إليها عنصر الصفر فنحصل على نصف زمرة ذات صفر أي G^0 وهي ليست زمرة وذلك لأنه ليس للصفر نظير (لأنه لو كان خلاف ذلك لأمكننا $0.x = x.0 = e \Leftarrow 0 = e$; x نظير الصفر) وهذا غير ممكن .

- نعرف نصف الزمرة الصفرية بأنها نصف الزمرة S التي تحقق الشرط :

$$xy = 0 \quad \forall x, y \in S$$

كما نعرف نصف الزمرة الصفرية اليسارية S التي تحقق الشرط :

$$xy = x \quad ; \; \forall x, y \in S$$

$$xy = y \quad ; \; \forall x, y \in S$$ (اليمينية) .

FUTURE

Scanned by CamScanner

Subject: /   /

ملاحظة: إن نصف الزمرة S التي تحقق الشرط $\forall a\in S;\ aS = Sa = S$ تكون زمرة.

البرهان

1) الخاصة التجميعية محققة لأن S نصف زمرة.

2)

$$\forall a\in S;\ aS=S \Rightarrow \forall a\in S;\ \exists x\in S:\ ax=a \Rightarrow$$

x محايد يميني لـ S

$$\forall a\in S:\ Sa=S \Rightarrow \forall a\in S;\ \exists y\in S:\ ya=a \Rightarrow$$

y محايد يساري لـ S.

(لأن y محايد يساري) $x = yx = y$ (لأن x محايد يميني)

أي أن S تملك محايداً للزمرة له بـ e

3)

$$e\in S,\ \forall a\in S;\ aS=S \Rightarrow \exists a'\in S;\ aa'=e$$
$$e\in S;\ \forall a\in S:\ Sa=S \Rightarrow \exists a''\in S;\ a''a=e \quad \Rightarrow$$

$$a''=a''e=a''aa'=ea'=a'$$

أي أنه مهما تكن $\forall a\in S$ فإنه يوجد عنصر مثل $a'\in S$ بحيث يكون $aa'=a'a=e$ وبالتالي يكون لكل عنصر من S نظير أي أن S زمرة.

أمثلة:

1) لتكن n عدداً طبيعياً و $S=\{0,1,2,\dots,n-1\}$ لنعرف العملية * على S بالشكل التالي:

$s_1 * s_2 =$ باقي قسمة $s_1 . s_2$ على n ; $s_1, s_2\in S$

أي $s_1 * s_2 = s_1 . s_2 \bmod(n)$

إن $(S,*)$ نصف زمرة تبديلية.

انتهت المحاضرة